L3 SM UE604P	**Université de Tours**	**Année 2009-2010**

Méthodes mathématiques pour la physique

10/05/2010 **durée de l'examen: 2h**

1. Considérons l'équation de Schroedinger décrivant deux oscillateurs harmoniques en dimension 1:

$$(\hat{H} - E)\psi = 0,$$
$$\hat{H} = -\partial_{x_1x_1} - \partial_{x_2x_2} + x_1^2 + x_2^2.$$

On peut écrire $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$, avec

$$\hat{H}_1 = \hat{p}_1^2 + \hat{x}_1^2, \qquad \hat{H}_2 = \hat{p}_2^2 + \hat{x}_2^2,$$

où $\hat{p}_1 = -i\partial_{x_1}$, $\hat{p}_2 = -i\partial_{x_2}$ (remarque: formellement $\hat{H}$ coïncide avec l'hamiltonien d'un oscillateur harmonique en dimension 2).

- En n'utilisant que les relations de commutation

$$[\hat{x}_1, \hat{p}_1] = [\hat{x}_2, \hat{p}_2] = i, \qquad [\hat{x}_1, \hat{x}_2] = [\hat{p}_1, \hat{p}_2] = [\hat{x}_1, \hat{p}_2] = [\hat{x}_2, \hat{p}_1] = 0,$$

montrer que les opérateurs $a_\pm$, $a_\pm^\dagger$ définis par

$$a_\pm = \frac{\hat{x}_1 \mp i\hat{x}_2 + i\hat{p}_1 \pm \hat{p}_2}{2}, \qquad a_\pm^\dagger = \frac{\hat{x}_1 \pm i\hat{x}_2 - i\hat{p}_1 \pm \hat{p}_2}{2} \tag{1}$$

vérifient les relations de commutation

$$\left[a_\varepsilon, a_{\varepsilon'}^\dagger\right] = \delta_{\varepsilon\varepsilon'}, \qquad [a_\varepsilon, a_{\varepsilon'}] = \left[a_\varepsilon^\dagger, a_{\varepsilon'}^\dagger\right] = 0, \qquad \text{où } \varepsilon, \varepsilon' = \pm 1. \tag{2}$$

- Montrer que l'opérateur $\hat{H}$ peut être représenté comme

$$\hat{H} = 2\left(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + 1\right).$$

- Montrer que si $|vac\rangle$ est un vecteur qui vérifie $a_+|vac\rangle = a_-|vac\rangle = 0$, alors $|k,l\rangle = \left(a_+^\dagger\right)^k \left(a_-^\dagger\right)^l |vac\rangle$ (avec $k, l = 0, 1, \dots, \infty$) est un vecteur propre de $\hat{H}$ et calculer la valeur propre correspondante.
- Montrer que l'opérateur $\hat{Q}$ défini par

$$\hat{Q} = a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-,$$

commute avec $\hat{H}$.
- Montrer que $|k,l\rangle$ est un vecteur propre de $\hat{Q}$, calculer la valeur propre correspondante. Pourquoi peut-on appeler l'opérateur Q la "charge"?

2. Dans cet exercice on s'intéresse à l'équation hypergéométrique de Gauss:

$$x(1-x)y''(x) + \big[c - (a+b+1)x\big]y'(x) - ab\,y(x) = 0. \tag{3}$$

Ici x note la variable indépendante et $a, b, c \in \mathbb{C}$ sont des paramètres constants.

- Décrire les comportements asymptotiques possibles des solutions de cette équation lorsque a) $x \to 0$; b) $x \to 1$; c) $x \to \infty$.

L'étude précédente semble de montrer qu'il existe une solution de (2) développable en série de Taylor au voisinage de $x = 0$. On cherche donc cette solution sous la forme

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k. \tag{4}$$

- Montrer que les coefficients α_k $(k = 0, 1, \ldots, \infty)$ vérifient la relation de récurrence suivante:

$$(k+1)(k+c)\alpha_{k+1} - (k+a)(k+b)\alpha_k = 0.$$

- Montrer que la solution de cette récurrence est donné par

$$\alpha_k = \frac{1}{k!}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+k)}\,\alpha_0.$$

La solution (4) de (3) avec $\alpha_0 = 1$ s'appelle la fonction hypergéométrique de Gauss et est noté ${}_2F_1(a, b; c; x)$.

- Montrer que pour $\mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, b > 0$ la fonction ${}_2F_1(a, b; c; x)$ admet une représentation intégrale (formule d'Euler):

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tx)^a}\, dt.$$

  Indication: développez $(1-tx)^{-a}$ en série de Taylor en x.